Einige Bemerkungen zum Pumpen[1]

Gerhard Buntrock[2]

Universität Würzburg

„Pumpinglemmata“ oder, wie sie auch manchmal genannt werden, „Schleifenlemmata“ sind eine häufig angewandte Methode, mit der man für Sprachen nachweist, daß sie nicht regulär oder nicht kontextfrei sind.

Um zu beweisen, daß es für eine Sprachklasse kein Pumpinglemma gibt, werden wir die folgende Definition verwenden:

Definition 1 *Wir sagen, eine Sprache L erfüllt ein Pumpinglemma, wenn gilt:*
Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so daß für alle $z \in L$ mit $|z| \geq n$ gilt, es gibt eine Zerlegung $z = uvw$, so daß für unendlich viele $i \in \mathbb{N}$ die Wörter $u'v^iw'$ zu L gehören, wobei u' und w' von u, w und i abhängen.

Nun gibt es eine unendliche Folge F von Zeichen aus $\{0, 1\}$, so daß es für kein $i > 2$ eine endliche Teilfolge z von F gibt, von der Form $z = v^i$. Eine solche Folge ist 1906 von Axel Thue und 1921 von Marston Morse (wieder-)entdeckt worden [Thu06, Mor21] (siehe auch [Jac83]):

0															
0								1							
0				1				1				0			
0		1		1		0		1		0		0		1	
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0

$\cdots$

0110 1001 1001 0110 1001 0110 0110 1001 1001 0110 0110 1001 0110 1001 $\cdots$

Diese Darstellung soll zwei Bildungsgesetze vermitteln: erstens: Bildung durch wiederholte Anwendung des durch $0 \rightarrow 01$ und $1 \rightarrow 10$ definierten Homomorphismus' sowie zweitens: die erste Zeile besteht nur aus der 0,

[1] Diese Arbeit wurde zum Teil mit Mitteln aus dem DFG-Projekt Wa 847/1-1 finanziert.

[2] `bunt@informatik.uni-wuerzburg.de`
`http://haegar.informatik.uni-wuerzburg.de/person/mitarbeiter/bunt/`

die $i+1$-te Zeile geht aus der i-ten hervor, indem man zundchst die i-te wieder hinschreibt und dahinter deren bitweises Komplement notiert. Die so entstehende unendliche Folge (genauer gesagt den Grenzwert dieser Folge) nennen wir die THUE-Folge (angedeutet in der letzten Zeile der 0-1-Zeilen).

Somit hat jede Sprache L, die aus einer unendlichen Menge von endlichen Teilwörtern der THUE-Folge besteht, die Eigenschaft, daß für kein $i > 2$ und kein Wort $z \in L$ eine Zerlegung $z = uvw$ existiert, so daß v^i ein Teilwort eines Wortes aus L ist.

Recht einfach lassen sich Grammatiken für solche Sprachen angeben, die wachsend kontextsensitiv sind. Daher gibt es für die wachsenden kontextsensitiven Sprachen kein Pumpinglemma.

ANDRZEJ EHRENFEUCHT, ROHIT PARIKH und GRZEGORZ ROZENBERG bewiesen 1981, daß es überabzählbar viele Sprachen gibt, die das Pumpinglemma für REG erfüllen [EPR81]. Sie benötigen für ihren Beweis 16 Alphabetsymbole. Mit einer einfachen Konstruktion, die von den möglichen Sprachen, die nur aus Teilwörtern der THUE-Folge bestehen, ausgeht, zeigen wir dieses Überabzählbarkeitsresultat für drei Alphabetsymbole. Mit einem Alphabetsymbol charakterisiert das Pumpinglemma für REG ebenso wie das Pumpinglemma für CFL die regulären Sprachen.

Literatur

[EPR81] EHRENFEUCHT, ANDRZEJ, ROHIT J. PARIKH und GRZEGORZ ROZENBERG: *Pumping Lemmas for Regular Sets.* SIAM Journal on Computing, 10(3):536–541, 1981.

[Jac83] JACOBS, KONRAD: *Einführung in die Kombinatork.* Walter de Gruyter, Berlin/New York, 1983.

[Mor21] MORSE, MARSTON: *Recurrent Geodesics on a Surface of Negative Curvature.* Transactions of the American Mathematical Society, 22:84–100, 1921.

[Thu06] THUE, AXEL: *Über unendliche Zeichenreihen.* Videnskaps-Selskabets Skrifter (Math.-Natur. Klasse), Skrifter No. 7:22 pp, 1906.